

TRANSIÇÃO DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA O ENSINO MÉDIO: PRAXELOGIAS NACIONAIS E ESTADUAL PRESCRITAS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA NOÇÃO DE FUNÇÃO

TRANSITION FROM MIDDLE SCHOOL TO HIGH SCHOOL: NATIONAL AND STATE PRESCRIBED PRAXEOLOGIES FOR THE TEACHING AND LEARNING OF THE NOTION OF FUNCTION

MARLENE ALVES DIAS*
VALDIR BEZERRA DOS SANTOS JÚNIOR**
REGINA MARA SILVA PEREIRA***
SIRLENE NEVES DE ANDRADE****

RESUMO

Neste artigo, analisamos a proposta de ensino de São Paulo para a noção de função na transição entre o Ensino Fundamental - anos finais e o Ensino Médio. O objetivo foi identificar, nas propostas de ensino oficiais, as regularidades e diferenças, de modo a subsidiar uma reflexão sobre as possíveis mudanças que possam ser justificadas por meio de um estudo que mostre as dificuldades de articular ao mesmo tempo dois pontos de vista desenvolvidos de forma desarticulada, a saber: o ponto de vista relação entre grandezas e o ponto de vista relação entre conjuntos. O referencial teórico central consiste na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e nas noções de quadro e mudanças de quadros, segundo definição de Douady, e pontos de vista conforme definição de Rogalski. A metodologia é qualitativa, utilizando o método da pesquisa documental. As análises mostram a existência de um descompasso nas abordagens para um mesmo ano escolar.

Palavras-chave: Função. TAD. Pontos de vista. Quadros. Documentos oficiais.

ABSTRACT

In this article we analyze the teaching proposal of São Paulo for the notion of function in the transition between elementary school and final years. The objective was to identify in the official teaching proposals the regularities and differences in order to help a reflection on the possible changes, that can be justified by means of a study that shows the difficulties of articulating at the same time two points of view developed in a disjointed form, namely: the point of view "relation between greatness" and the point of view "relation between sets". The central theoretical reference to the anthropological theory of the didactic (TAD) and the notions of framework and changes of frames according to Douady's definition and points of view as defined by Rogalski. The methodology is qualitative using the documental research method. The analyzes show the existence of a mismatch in the approaches for the same school year.

Keywords: Function. ATD. Viewpoints. Frames. Official documents.

* Doutora em Matemática - Didática da Matemática. UNIAN - SP. maralvesdias@gmail.com.

** Doutor em Educação Matemática. UFPE. valdir.bezerra@gmail.com

*** Doutora em Química. UNIAN - SP. reginapereira1@anhanguera.com

**** Doutora em Educação Matemática. Secretaria de Educação - SP. sirlene-neves@hotmail.com

INTRODUÇÃO

Desde 1997, o Ministério da Educação tem implementado documentos que correspondem às propostas nacionais para o ensino nas diferentes regiões do Brasil. Esses documentos foram desenvolvidos por especialistas de cada área e servem de apoio para autores de livros didáticos e Secretarias de Estado da Educação organizarem seus respectivos trabalhos.

É importante observar que, em 1997, foram introduzidos os Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental anos iniciais - PCN, Brasil (1997); em 1998, os Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental - anos finais - PCN, Brasil (1998); em 2000, 2002 e 2006, foram implementadas sucessivamente as propostas para o Ensino Médio por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM, Brasil (2000), Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio - PCN+, Brasil (2002) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM, Brasil (2006).

Atualmente, foi implementada a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, Brasil (2018), para o Ensino fundamental - anos iniciais e finais. Trata-se de um documento que segue: [...] a Constituição Federal de 1988, em seu Artigo 205, reconhece a educação como direito fundamental compartilhado entre Estado, família e sociedade [...] (BRASIL, 2018, p.10), o que é ressaltado na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), inciso IV, artigo 9º, a saber:

[...] estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum (BRASIL, 1996, apud BRASIL, 2018).

Assim, este documento representa o mínimo que se pretende institucionalizar nas escolas brasileiras de Educação Infantil (alunos de 3 a 5 anos), Ensino Fundamental (alunos de 6 a 14 anos) e Ensino Médio (alunos de 15 a 17 anos).

Apesar de a nova proposta estar em prática, os livros didáticos, uma importante instituição nacional, uma vez que os mesmos são analisados e distribuídos pelo Ministério da Educação para as escolas públicas, ainda não incorporaram as modificações necessárias para auxiliar nesta mudança. Mas algumas Secretarias de Estado da Educação iniciaram o processo de (re)construção de seus próprios materiais.

É importante ressaltar que o Estado de São Paulo propôs um currículo estadual a partir de 2008, para o qual foram desenvolvidos materiais específicos (Cadernos) para cada disciplina. Atualmente, os educadores dessa secretaria vêm organizando encontros presenciais e a distância para discutir a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, Brasil (2018) e viabilizar sua implementação.

Observamos ainda que essas últimas mudanças ainda não atingiram o Ensino Médio, no qual sobrevivem atualmente nas escolas públicas de São Paulo a proposta nacional indicada na OCEM e o currículo do estado de São Paulo, desenvolvido por meio dos Cadernos, ou seja, as duas propostas representam a relação institucional que se espera seja desenvolvida simultaneamente.

Trata-se de um fenômeno didático que, segundo nosso ponto de vista, merece ser estudado de forma ampla, mas para este trabalho, propomo-nos apenas a estudá-lo para o caso específico do conceito de função, que era introduzido no Ensino Fundamental - anos finais e revisitado e ampliado no Ensino Médio e que, segundo a nova proposta para o Ensino Fundamental, inicia-se no primeiro ano do

Ensino Fundamental - anos iniciais, com a introdução das ideias de equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação, que são propostas para serem desenvolvidas em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas Probabilidade e Estatística, para as quais são indicadas competências e habilidades, sendo que o desenvolvimento dessas unidades temáticas deve preocupar-se com o ano escolar em que serão estudadas.

Segundo a BNCC, para a unidade temática Álgebra, a ênfase deve ser dada às ideias de equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade, o que conduz à noção de função, cuja proposta é que se desenvolva de forma articulada com as outras temáticas. Cabe assinalar aqui que esta articulação fica completamente a cargo dos especialistas da área das secretarias (noosfera - transposição didática externa) de estado e municipais de educação e sua real aplicação em sala de aula depende particularmente dos conhecimentos do professor (transposição didática interna) e do nível de estudo possível de cada classe.

Logo, nossa experiência tende a considerar que os professores podem encontrar dificuldades para desenvolver novas propostas de ensino, que são implementadas todas ao mesmo tempo, sem levar em conta as propostas anteriores nas quais os estudantes estavam inseridos.

Assim, como ainda não existem livros didáticos que possam auxiliá-los, consideramos, neste extrato de pesquisa, os livros indicados no último Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Fundamental - anos finais e o Ensino Médio e os Cadernos do professor do estado de São Paulo, que, em termos do conceito de função, são os materiais didáticos que podem nos ajudar a compreender quais as expectativas institucionais para o desenvolvimento dessas noções junto aos estudantes dessas etapas escolares desse estado.

Desse modo, nossa problemática consistiu em identificar as condições e restrições atuais para o desenvolvimento da Matemática, o que é amplo e acarreta diversas perspectivas de estudos. Essa análise pode contribuir para que compreendamos melhor como auxiliar professores a articularem saberes ensinados aos saberes a ensinar por meio de revisitas aos conhecimentos que apresentam maiores dificuldades, com ampliação dos mesmos em consonância com a nova orientação nacional.

Considerando as condições acima, colocamo-nos as seguintes questões: Como é realizada a transição entre o Ensino Fundamental - anos finais e o Ensino Médio, no que concerne ao ensino do conceito de função, de acordo com os documentos produzidos pelo Ministério da Educação e da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, os livros didáticos aprovados oficialmente e os cadernos desenvolvidos e distribuídos pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo? Quais as praxeologias prescritas por esses documentos, mais particularmente, nos livros didáticos e nos cadernos?

Desse modo, nosso objetivo foi identificar, nas propostas de ensino oficiais, as regularidades e diferenças, de modo a orientar uma reflexão sobre as possíveis mudanças, que possam ser justificadas por meio de um estudo que mostre as dificuldades de articular, ao mesmo tempo, dois pontos de vista desenvolvidos de maneira desarticulada, a saber: o ponto de vista relação entre grandezas e o ponto de vista relação entre conjuntos.

Para isto, ressaltamos primeiramente que a escolha de estudar o conceito matemático de função deve-se ao fato de que esse conceito fornece certo número de abordagens, que variam de acordo com os diferentes quadros que desejamos articular e segundo a disponibilidade dos conhecimentos esperados dos estudantes. Além disso, num mesmo quadro, podemos introduzir este conceito por meio dos dois pontos de vista: relação entre grandezas e relação entre dois conjuntos.

Observamos ainda que, como em outros países, o estudo do conceito de função tem um papel central na educação básica brasileira, em particular, no Ensino Médio (estudantes de 15 a 17 anos),

mas sua introdução, se consideramos a relação institucional esperada e existente, é realizada no último ano do Ensino Fundamental - anos finais (estudantes de 14 a 15 anos).

A partir das questões acima, da explicitação do nosso objetivo e da escolha do conceito matemático a ser estudado, definimos o referencial teórico e a metodologia da nossa pesquisa que está centrada no estudo das praxeologias prescritas, das responsabilidades dos responsáveis pelo sistema de ensino indicadas por meio dos níveis de codeterminação didática, quando se considera um ensino cujas expectativas institucionais para o seu desenvolvimento precisam seguir duas abordagens que nem sempre estão em harmonia.

Assim, para o desenvolvimento da pesquisa, escolhemos como quadro teórico central a Teoria Antropológica do Didático de Bosch e Chevallard (1999) e Chevallard (1994, 2002, 2007, 2011, 2014, 2015, 2016) e as abordagens teóricas em termos de quadros, segundo a definição de Douady (1984) e pontos de vista, segundo a definição de Rogalski (2001, 2013).

REFERENCIAL TEÓRICO

Teoria Antropológica do Didático

Em relação à Teoria Antropológica do Didático (TAD), retivemos as noções de praxeologia, relações institucionais e pessoais, ostensivos e não ostensivos, sistema didático, ecologia e níveis de codeterminação, as quais apresentamos brevemente.

Iniciamos considerando a noção de praxeologia que, segundo Chevallard (2014), corresponde aos tipos de tarefas (T) que, para serem executadas, necessitam de uma maneira de fazer que o autor denomina técnica (τ). A associação tarefa-técnica é definida como um *saber fazer* que não sobrevive isoladamente, solicitando um ambiente tecnológico-teórico, que corresponde a um *saber* formado por uma tecnologia (θ), ou seja, um discurso racional que justifica e torna a técnica compreensível, e de uma teoria (Θ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada. O sistema composto por tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria [T, τ, θ, Θ] constitui o que Chevallard denomina praxeologia, sendo ela que articula uma parte prático-técnica, que equivale ao saber fazer, a uma parte tecnológica teórica, que corresponde ao saber. É a noção de praxeologia que nos auxilia a melhor compreender os problemas associados ao saber a ensinar sob o modo como é proposto para ser desenvolvido.

Outras noções importantes para a pesquisa são as de relação pessoal a um objeto o e relação institucional a este mesmo objeto o . Desse modo, observamos que Chevallard (2015) considera inicialmente a noção de relação a um objeto o , a saber: para uma determinada pessoa x e para um dado objeto o , essa noção designa o sistema mais ou menos integrado, mais ou menos rico, de todas as maneiras que x pode conectar-se com o . Na sequência, ele observa que a relação pessoal de x com o , indicada por $R(x, o)$, reúne o que x sabe (ou crê saber) sobre o , o que ele pode dizer, como ele pode usá-lo ou manuseá-lo, o que ele sente face a o , suas emoções, o conteúdo de seus sonhos em que o objeto o aparece etc. Assim, o objeto o material ou imaterial, simples ou complexo, minúsculo ou imenso, pode ser, por exemplo: o número 13, o grafismo 13, um lápis ou a ideia de lápis, a obra de Descartes ou de Sartre, assim como uma determinada pessoa, ou seja, uma pessoa também é um objeto.

Após definir objeto e relação pessoal $R(x, o)$, o autor explicita, por meio de exemplos, que na teoria tudo é objeto, inclusive as pessoas, como registramos acima. Chevallard (2015) observa ainda que a relação pessoal a um objeto varia de pessoa para pessoa, esclarecendo: se $x_2 \neq x_1$ temos como regra geral $R(x_2, o) \neq R(x_1, o)$. Além disso, o autor salienta que, para uma pessoa x e um objeto o ,

podemos ter $R(x, o) = \emptyset$, o que significa dizer “ x não conhece o objeto o ”. O contrário, ou seja, dizer que “ x conhece o objeto o ” é o mesmo que dizer $R(x, o) \neq \emptyset$, o que ocorre simplesmente quando x “ouviu falar” de o , apenas ouviu pronunciar o nome de o , o que pode ser observado, quando alguém diz “essa palavra me diz algo”. Desse modo, segundo o autor, o verbo *conhecer* pode ser, em TAD, minimalista ou pode designar uma ampla variedade de conteúdo da relação $R(x, o)$, o que ocorre quando uma pessoa x que conhece o é um eminente especialista de o . Essa definição de relação pessoal evidencia a distinção na didática francesa entre conhecimento (individual) e saber (institucional).

A partir da noção de relação pessoal, Chevallard (2015) define universo cognitivo pessoal de C e indicado $Co(x)$, ou seja, o conjunto das relações $R(x, o)$ não vazias: $Co(x) = \{ R(x, o) / R(x, o) \neq \emptyset \}$.

Definidos as noções de relação pessoal e o universo cognitivo pessoal, o autor afirma que vários problemas fundamentais podem ser postos em foco. Desse modo, dada uma pessoa x , sob que condições é formado seu universo cognitivo atual? Sob que condições este universo cognitivo poderia mudar de forma determinada? Assim, para iniciar o estudo dessas questões, o autor introduz outro tipo de objeto: as instituições.

Desse modo, o objeto instituição tem em TAD um sentido mais amplo que o usual, pois podemos considerar os exemplos: uma família, uma classe, um casal etc. Assim, uma dada instituição I oferece diferentes posições, como por exemplo, em uma classe, existe pelo menos a posição de professor e a de aluno. Sendo assim, considerar uma instituição pode conduzir a apreciar as posições que poderíamos ter ignorado, como por exemplo: a posição de *fayot* (aquele que quer se mostrar para seus superiores).

Chevallard (2015) observa que uma posição p em uma instituição I pode, num determinado momento, não ser ocupada ou ser ocupada por várias pessoas. Quando uma pessoa x ocupar a posição p de I , esta pessoa se tornará sujeito de I em posição p , o que indica que ela se sujeitou a ocupar a posição p na instituição I , indicada $R_I(p, o)$.

Após considerar os objetos relação pessoal, relação institucional e universo cognitivo, Chevallard (2015) formula a questão: Como essas questões esclarecem a formação e reforma das relações pessoais? Assim, segundo o autor, o universo cognitivo institucional $Co_I(p)$ constitui as relações institucionais não vazias sobre o objeto o , indicadas $R_I(p, o)$, que representa a relação pessoal ideal ao objeto, o que deveria ser a de uma pessoa x que ocupa a posição p em I . Segundo Chevallard (2015), tal pessoa não existe, uma vez que toda pessoa que se sujeita à instituição I está condenada a aparecer um dia como um mau sujeito de I .

Desse modo, consoante o autor, $R_I(p, o)$ reúne as relações pessoais de x com o objeto o , a menos que x seja rejeitado por não estar em conformidade. O autor esclarece que alguns aspectos da conformidade são instantâneos e outros progressivos e que quando $R_I(p, o)$ é vazia, *concluimos que os sujeitos de I em posição p não conhecem o* , mesmo que eles considerem sua relação pessoal com o não vazia.

O resultado desta conformidade, de acordo com Chevallard (2015), indica que em uma relação pessoal de uma pessoa x com um objeto o , $R(x, o)$ emerge de um complexo de elementos provenientes do conjunto de relações institucionais $R_I(p, o) \neq \emptyset$ relativas à posição p de instituições I que x ocupou ou ocupa. Isso permite considerar que a relação pessoa $R(x, o)$, mais genericamente, o universo cognitivo $Co(x)$ é o efeito do conjunto de sujeições institucionais passadas e presentes de x .

Como solução para essa questão, o autor diz que é preciso contentar-se em encontrar certa conformidade de $R(x, o)$ com $R_I(p, o)$ do ponto de vista da instituição I , o que é indicado por $R(x, o) \cong R_I(p, o)$. Desse modo, a relação de $\cong I$ (*conformidade com I*) faz de x um sujeito aceitável de I em posição p , ou seja, um sujeito de I . Logo, o processo de conformidade de x com p explica a formação

e as mudanças do universo cognitivo de x . Ressaltamos aqui que, segundo Chevallard (2015), as noções acima apresentadas precisam ser parametrizadas pelo tempo.

Após explicitar as ferramentas de análise das relações dos indivíduos nas diferentes instituições a que podem submeter-se, para melhor compreender o funcionamento das técnicas quando da análise das praxeologias, que podem funcionar de maneira diferente nas instituições, é importante considerar as noções de objetos ostensivos e não ostensivos, uma vez que Chevallard (1994), após ponderar que em toda atividade humana somos chamados a realizar diferentes tipos de tarefas e que para cada uma delas existe uma técnica, o autor apresenta as seguintes questões: De que é feita uma técnica? De que ingredientes se compõe? Em que consiste a “execução” de uma técnica?

Para respondê-las, o pesquisador distingue dois tipos de objetos: os ostensivos e os não ostensivos. Os primeiros são objetos que têm para nós uma forma material, sensível. Exemplos: objetos materiais (caneta, compasso etc.); gestos (*ostensivos gestuais*); palavras, e mais genericamente o discurso (*ostensivos discursivos*); esquemas, desenhos, grafismos (*ostensivos gráficos*); escritas e formalismos (*ostensivos escriturais*).

A característica dos ostensivos é que podem ser manipulados, não só no sentido tátil estrito (como um compasso, uma caneta etc.), mas também em sentido amplo (pela voz, pelo olhar etc.). Ao contrário, os objetos *não ostensivos*, que denominamos usualmente noções, conceitos, ideias etc., não podem ser manipulados, mas só evocados por manipulação dos ostensivos associados. Chevallard (1994) observa existir uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos, pois os primeiros são *manipulados* por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto estes últimos são *evocados* por meio da manipulação dos ostensivos.

Para este artigo, utilizamos ainda a ferramenta níveis de codeterminação, que nos auxilia a compreender melhor o papel do professor no processo de ensino. Chevallard (2002) introduz a escala dos níveis de codeterminação, a saber: tópicos \leftrightarrow temas \leftrightarrow setores \leftrightarrow domínios \leftrightarrow disciplinas \leftrightarrow pedagogia \leftrightarrow escola \leftrightarrow sociedade \leftrightarrow civilização \leftrightarrow humanidade.

Segundo o pesquisador, o problema de fazer funcionar organizações didáticas concebidas segundo determinado ponto de vista conduz a enfrentar restrições que distorcem a estrutura e eliminam as funções, quando deixam de ser apenas um mundo no papel. Como exemplo, podemos citar os currículos nacionais, que apresentam grandes dificuldades para funcionar em consonância com as orientações expostas no documento.

Ao enfatizar a questão das restrições, o autor as explicita associando as possíveis organizações matemáticas (praxeologias matemáticas) à hierarquia dos níveis de codeterminação, mostrando que o interesse dessa nova ferramenta de análise didática é viabilizar a triagem das restrições que dirigem o estudo escolar, de modo a escolher aquelas que possibilitem evitar um desequilíbrio muito flagrante.

Dessa forma, Chevallard (2002) parte da afirmação que as restrições devem-se ao fato de que uma organização matemática não se faz em um vazio de obras, pois uma organização matemática pontual praticamente não é encontrada no desenvolvimento de estudos reais, já que essa abstração existe para o estudante que, em geral, é avaliado sobre tipos de tarefas que, para ele, correspondem a um *tópico* completo quase independente dos outros. Já para o professor, há uma unidade em torno de uma tecnologia que tem *status* de *tema* de estudo e que se agrupa em uma organização regional, que corresponde ao amálgama de organizações locais, admitindo uma mesma teoria, que é associada ao *setor* de estudo. Existem ainda níveis superiores de determinação de uma organização matemática, ou seja, o correspondente ao amálgama de várias organizações regionais, que conduzem a uma organização global identificada a um *domínio* de estudo, cujo conjunto é amalgamado em uma disciplina.

O pesquisador esclarece que os professores, em geral, referem-se apenas aos níveis *tópicos* e *temas*, mas que poderiam ampliar essa condição, por exemplo, apresentando o programa de estudos da classe para o ano escolar, o que lhes favorece expor cada *domínio* que compõe o programa e completá-lo no decorrer do ano com uma apresentação dos *setores* de estudo que compõem estes *domínios*, situando *temas* e *tópicos* que serão estudados na sequência.

Para o autor, o professor que não localiza *temas* e *tópicos* nos *setores* e *domínios* de estudo e segue o programa introduzindo-os um após o outro como uma fila indiana, irá provocar uma atomização do material de estudo que contrasta com a ambição original, que é ensinar Matemática.

Desse modo, conforme Chevallard (2002), encontramos aqui um fenômeno ecológico central, o da codeterminação das organizações matemáticas e didáticas, pois a ausência da relação do *tópico* ou *tema* com os níveis superiores *setores* e *domínios*, além da própria *disciplina*, torna impossível pensar a relação de motivação entre os tipos de tarefas. Assim, se os professores ficam confinados ao nível *tema*, as diferentes esferas da *noosfera* cuidam dos níveis superiores - *setores*, *domínios*, *disciplinas*, fazendo com que determinados *domínios* da Matemática sejam controlados por instâncias de capital científico e político.

Na escala constituída por *tópicos*, *temas*, *setores*, *domínios* e *disciplinas*, juntam-se ainda níveis suplementares (*sociedade*, *escola*, *pedagogia*), que advêm de uma construção histórica. Cada nível determina a forma de construção e reconstrução das organizações matemáticas e didáticas por meio dos pontos de apoio que elas oferecem e das restrições que impõem.

O nível *pedagogia* é aquele onde termina a ação da *noosfera* disciplinar, representando a fronteira entre a *noosfera*, que é composta de especialistas em Pedagogia, e aqueles níveis que a lei propõe sem se preocupar com os decretos de aplicação, e onde reina o que o autor denomina política.

Além do nível *pedagogia*, encontramos o nível *escola*, isto é, o nível de restrições e pontos de apoio próprios da instituição escolar. Assim, a escola é definida como instituição social dedicada ao estudo, onde se suspende temporariamente o fluxo das atividades comuns da vida para estudar, ou seja, desconstruir e reconstruir as praxeologias da vida.

No nível *sociedade*, existem numerosas restrições e, como exemplo, o autor apresenta o fato de que uma sociedade pode compreender a instrução dada em sua escola sob pontos de vista diferentes, que não são didaticamente equivalentes, isto é, que não criam as mesmas condições na classe para um mesmo *tópico* de estudo.

Chevallard (2007) inclui, na escala de níveis de codeterminação, o nível *civilização* e elucida que as praxeologias necessitam de condições ecológicas, uma vez que estas são componentes dos diferentes *habitats*, que correspondem aos lugares onde vivem os diferentes objetos matemáticos, os quais têm diferentes funções nesses *habitats* que correspondem ao *nicho*, necessitando de um determinado *meio* para funcionar; assim as praxeologias vivem e sobrevivem em função das condições e restrições ecológicas do *meio* em que funcionam.

Chevallard e Artaud (2016) ampliam a escala de coterminação didática, incluindo os níveis sistema didático e humanidade, como seguem: humanidade ↔ civilização ↔ sociedade ↔ escola ↔ pedagogia ↔ sistema didático, ressaltando que essa escala possibilita triar as condições sob as quais as pessoas *x* e as instituições *l* vivem e operam.

Assim, o nível *sistema didático* corresponde ao sistema definido em Chevallard (2011) pelo símbolo $S(x, y, \heartsuit)$, no qual *y* representa uma pessoa ou instituição com o objetivo de fazer (ou fazendo) qualquer coisa para que outra instância ou pessoa aprenda qualquer coisa. A esta outra instância ou pessoa que está sujeita a aprender qualquer coisa, ele denomina *x* e, por fim, representa por \heartsuit

a “qualquer coisa que y ajuda x a aprender”, a saber: o *desafio didático*. Nesta situação, é aceita a possibilidade da igualdade $y=x$, no momento em que x ajuda a si mesmo a aprender ♥. Assim, entre os níveis *disciplina* e *pedagogia*, existe o nível sistema didático que, em função de sua definição, deve ser da responsabilidade do professor, mas que muitas vezes fica a cargo da noosfera disciplinar.

Ao se referir ao nível *humanidade*, o pesquisador indica que atualmente existe apenas uma humanidade, após o desaparecimento do homem de Neanderthal há mais de 30.000 anos. O autor destaca que este nível corresponde a uma condição determinante para a didática, posto que o “*homo sapiens*”, que denominamos “*néotène*”, ou seja, um ser prematuro deve construir e aprender para continuar a viver.

O autor enfatiza que, no processo de difusão praxeológica, as condições e restrições são cultivadas e centralizadas com a ajuda da escala de níveis de codeterminação, pois elas podem situar-se em determinado nível da escala e exprimir-se em outro, o que não nos possibilita isolar o que se passa na classe do conjunto do sistema de ensino.

Esta representação evidencia que os níveis de codeterminação são percebidos nos dois sentidos, ou seja, se modificarmos as condições e restrições de determinado nível, teremos repercussões sobre os demais.

Após esta breve apresentação das noções da TAD por nós utilizadas, consideramos a noção de quadro e mudança de quadros, que nos auxilia a identificar as possíveis lacunas encontradas no estudo do conceito de função, em particular, das funções afim e quadrática, quando da transição entre o Ensino Fundamental - anos finais e o Ensino Médio.

A noção de quadro e mudança de quadros

Essa noção foi introduzida por Douady (1984) em uma perspectiva de teorização didática fundamentada sobre uma análise epistemológica que evidencia:

- a dualidade dos conceitos matemáticos, em geral, funcionando inicialmente como ferramentas implícitas, depois explícitas da atividade matemática, antes de assumirem o status de objeto e de serem trabalhados enquanto tais.

- o papel desempenhado pelas mudanças de quadros na atividade e na produção matemática.

Essa análise epistemológica conduziu a pesquisadora a transpor as características acima indicadas, que correspondem ao funcionamento dos matemáticos, para o domínio da didática via as noções de dialética ferramenta-objeto e jogos de quadros.

Douady (1984) define *ferramenta implícita* como sendo um conceito em elaboração, ou seja, trata-se de um processo que pode durar vários anos. Da mesma forma, segundo essa pesquisadora, uma *ferramenta explícita* está associada a um conceito ou a uma noção utilizada intencionalmente para resolver um problema. Já um *objeto* é definido como um componente cultural que ocupa um lugar bem determinado no complexo edifício do saber matemático, sendo reconhecido socialmente.

Desse modo, para Douady (1984), o objeto matemático é parte de um edifício mais amplo, que é o saber matemático, constituindo assim o que ela denomina *quadro*, que se constitui em um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que lhes são associadas. Para a autora, as imagens mentais são essenciais, pois funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos, mas diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas.

Após definir quadro, a pesquisadora introduz a noção de *mudanças de quadros* como sendo meios para se obterem formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e permitem utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas à formulação inicial. As traduções de um quadro em outro terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, proporcionando assim a criação de novos objetos matemáticos, enriquecendo, tanto o quadro original, como os quadros auxiliares de trabalho.

Para este trabalho, consideramos os seguintes quadros: quadro algébrico, quadro geométrico, quadro da física, quadro das situações contextualizadas.

A noção de ponto de vista

A noção de ponto de vista é introduzida por Rogalski (2001) nos seguintes termos:

Dois pontos de vista diferentes sobre um objeto matemático são diferentes maneiras de observá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los. Neste sentido, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas podemos considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro. (ROGALSKI, 2001, p. 13, tradução nossa).

Ao explicitar a afirmação sobre quadros, Rogalski (2001) assinala que trabalhar em um determinado quadro corresponde a estudar um problema, cujos dados, os enunciados, as primeiras ferramentas de estudo, situam-se em uma teoria principal bem definida, mais ou menos vasta, tendo sempre uma relação com um campo conceitual, sendo assim, um quadro aparece como um *domínio* de trabalho, podendo existirem, entre diferentes quadros, relações de encaixe, intersecções não vazias com fronteiras necessariamente um pouco imprecisas. Trata-se, principalmente, de pontos de referência úteis para analisar os problemas, para classificá-los, para descrever relações, para situar objetos matemáticos precisos, sendo assim valiosos, tanto para a pesquisa, como para o ensino, contribuindo para a previsão das possíveis mudanças de quadro.

O pesquisador pontua que podemos quase sempre identificar os quadros nos livros didáticos e em seus capítulos, nos programas ou ainda por meio das tradições históricas. Para o objeto função, Rogalski (2001) identifica os seguintes quadros:

- quadro da análise (propriedades de continuidade, derivabilidade...);
- quadro dos conjuntos (aplicações, equações, injetividade e sobrejetividade, funções recíprocas, imagens recíprocas...);
- quadro algébrico (tipos de funções e as fórmulas que as definem e regem: polinomiais, circulares...);
- quadro geométrico (gráficos de funções tendo propriedades geométricas particulares: retas, parábolas e hipérbolas, questões de assíntotas, de convexidade).
- quadro da análise funcional (corresponde também ao quadro dos conjuntos, uma vez que as funções tornam-se elementos de conjuntos de funções, existem aplicações entre conjuntos de funções, equações funcionais...);
- quadro da análise numérica (aproximações e métodos do cálculo numérico) (ROGALSKI, 2001, p. 14, tradução nossa).

Observamos aqui que os quadros algébrico, geométrico, conjuntos e análise por nós considerados são os mesmos identificados por Rogalski (2001). Os quadros da análise funcional e da análise numérica não foram considerados neste trabalho.

Identificamos ainda em nossa pesquisa dois pontos de vista sobre o conceito de função definidos em Rogalski (2013), a saber: ponto de vista *interdependência entre grandezas* e ponto de vista *relação entre dois conjuntos*.

O ponto de vista interdependência entre grandezas, neste artigo tratado como relação entre grandezas, conforme Rogalski (2013), estende-se desde a antiguidade até o início do século XVII, sendo motivado pela utilização das *relações entre grandezas* para descrever e estudar um fenômeno natural. Trata-se, assim, de *funções* particulares representadas por meio de diferentes ostensivos (tabulações, linguagem natural, grandezas, fórmulas, curvas geométricas).

O autor acrescenta que para este ponto de vista, não existe uma concepção geral, uma vez que as funções são consideradas *ferramentas* sem unificação, sem formalização e sem símbolos, tendo sobrevivido até Viète e Descartes, sendo utilizadas inicialmente para resolver problemas de Astronomia, Física e Mecânica.

Após apresentar elementos históricos sobre a evolução da noção de função, associando-as às possibilidades de trabalho com os estudantes nas diferentes etapas escolares e ao meditar sobre o trabalho de Cantor, Rogalski esclarece que é sua teoria ingênua sobre conjuntos que dá margem a considerar a noção de relação entre conjuntos, que generaliza formalmente a noção de função, já que unifica as práticas anteriores. Mas o autor considera que introduzir este caráter formalizador, unificador e generalizador (fug) às funções pode gerar problemas didáticos difíceis de serem tratados.

Observamos aqui que o ponto de vista *relação entre dois conjuntos* corresponde à segunda definição de Euler, e as definições de Cantor e Bourbaki. Rogalski (2013) faz algumas reflexões didáticas sobre a utilização deste ponto de vista com estudantes cujas idades correspondem à daqueles que frequentam nosso Ensino Médio.

METODOLOGIA

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, segundo Ludke e André (2013), cujo método é o da pesquisa documental que, conforme as autoras, consiste em analisar documentos retrospectivos e contemporâneos considerados cientificamente autênticos. Desse modo, coerentemente com o referencial teórico e o objetivo da pesquisa, nosso estudo é centrado na análise das propostas institucionais para o ensino do conceito de função por meio dos documentos oficiais do Ministério da Educação e da Secretaria Estadual da Educação e da análise de um livro didático do mesmo autor para o Ensino Fundamental - anos finais (estudantes de 14 anos) e início do Ensino Médio (estudantes de 15 anos) indicado pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD e do caderno do professor para o mesmo grupo de estudantes, indicado pela Secretaria Estadual da Educação, o que supõe um estudo comparado entre essas duas propostas para a identificação das regularidades e diferenças existentes. É por meio desse material que identificamos as praxeologias prescritas para o desenvolvimento do conceito de função na transição entre o Ensino Fundamental Anos Finais - EF e o Ensino Médio - EM.

Os documentos oficiais analisados para a identificação das relações institucionais esperadas foram: Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN do Ensino Fundamental Anos Finais, Brasil (1998), Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM, Brasil (2006), Currículo do Estado de São Paulo, São Paulo (2012). Para identificar as relações institucionais existentes, consideramos a obra

de Dante (2016) para o nono ano do EF e Dante (2016a) para o primeiro ano do EM. A escolha dessas obras se deve aos seguintes fatores: por serem representativas das expectativas institucionais existentes, tanto para o EF, como para o EM; por terem sido avaliadas positivamente no Plano Nacional do Livro Didático - PNLD desde 2002 e por estarem entre as mais indicadas pelas escolas do País. Além disso, as obras propõem a sequência em relação às ideias matemáticas desenvolvidas para serem trabalhadas em dois momentos que representam uma ruptura importante para os estudantes, a saber: a passagem do EF para o EM.

Analisamos ainda as tarefas sobre o conceito de função nos relatórios pedagógicos do Sistema de Avaliação do rendimento Escolar do Estado de São Paulo - SARESP dos cinco últimos anos para identificar a marca das relações institucionais existentes sobre as relações pessoais esperadas dos estudantes, uma vez que essa macroavaliação é aplicada no nono ano do EF e no terceiro ano do EM para as escolas estaduais, municipais e algumas escolas privadas do estado de São Paulo, sendo que as escolas estaduais utilizam ainda o caderno e o livro didático, que correspondem ao fenômeno didático que motivou esta pesquisa.

Vale observar que o caderno do aluno é semelhante ao caderno do professor, sendo retiradas apenas as orientações específicas ao professor, o que nos conduziu a analisar somente o caderno do professor.

Para a análise do livro didático e do caderno do professor, construímos uma grade de análise, segundo modelo desenvolvido por Dias (1998) em sua tese, que apresentamos na sequência.

A grade de análise

O propósito da grade é identificar as praxeologias propostas, assim como as possíveis mudanças de quadros e os pontos de vista em jogo nas tarefas encontradas no caderno e nos livros didáticos para serem desenvolvidas com os estudantes do EF e EM.

A grade de análise possibilitou analisar os diferentes tipos de tarefas em função das técnicas propostas e das tecnologias e teorias consideradas. Além disso, com ela, identificamos os ostensivos e não ostensivos em jogo nas tarefas, os quadros utilizados no enunciado e na solução das tarefas e o ponto de vista adotado para o desenvolvimento da tarefa proposta.

Segue um exemplo de funcionamento da grade de análise sobre um tipo de tarefa que é desenvolvida tanto no Ensino Fundamental - anos finais como no Ensino Médio.

Tipo de Tarefa: Utilizar a noção de função para relacionar duas grandezas (ponto de vista *relação entre grandezas*).

Exemplo: Dada a tabela abaixo, que indica a relação entre a medida do lado de um quadrado (L) e o seu perímetro (P), completar a tabela e determinar a lei que associa a medida lado com o perímetro.

Medida do lado (L)	1	2	3	4	5	...	l
Perímetro (P)						...	

Para esse tipo de tarefa, as variáveis são as seguintes:

Técnicas: A técnica 1 consiste em aplicar a noção perímetro para o caso dado. Sendo o polígono um quadrado, observar que basta multiplicar o lado do quadrado por 4, obtendo a relação algébrica

ca $P = 4l$, ou seja, aplicar a técnica considerada no livro didático). A técnica 2 consiste em aplicar a noção de perímetro e observar que as grandezas são diretamente proporcionais, ou seja, $\frac{P}{l} = 4$, logo $p = 4l$ (técnica considerada no caderno).

Tecnologias: A noção de perímetro de um quadrado para as técnicas 1 e 2, a noção de multiplicação de parcelas iguais e de relação algébrica entre duas grandezas para a técnica 1 e a noção de grandezas diretamente proporcionais e de relação algébrica entre duas grandezas diretamente proporcionais para a técnica 2.

Teorias: Grandezas e Medidas, Geometria Euclidiana Plana, Álgebra Elementar, Grandezas diretamente proporcionais;

Ostensivos: numérico, algébrico e tabela.

Não Ostensivos: Noções de quadrado, perímetro, multiplicação como soma de parcelas iguais, grandezas diretamente proporcionais, regras e leis do cálculo algébrico.

Quadro(s) em que a tarefa é enunciada: geométrico;

Quadro(s) em que a tarefa é resolvida: geométrico e algébrico;

Ponto de vista em jogo na tarefa: relação entre grandezas.

O exemplo acima mostra que esse tipo de tarefa pode auxiliar o professor do EM a revisar e articular noções desenvolvidas no EF para a noção de função e mostrar a importância do estudo das funções antes de introduzir o ponto de vista *relação entre conjuntos*.

RESULTADOS DAS ANÁLISES

Iniciamos apresentando os resultados da análise das propostas para o ensino do conceito de função para os estudantes do último ano do EF e primeiro ano do EM, indicadas pelo Ministério da Educação e pela Secretaria de Educação de São Paulo, segundo documentos apontados na Metodologia.

Análise dos documentos nacionais

A proposta institucional nacional para o EF e o EM é apresentada separadamente, sendo que a do Ensino Fundamental - anos finais foi inserida em 1998 e a do Ensino Médio inicia-se com um documento sobre mudanças associadas ao novo projeto escolar em 2000, seguido de outro documento, publicado em 2002, no qual se indicavam os conteúdos e a proposta de trabalho, considerando-se o desenvolvimento de determinadas competências, sendo esta última ampliada em 2006, pois se incluíram neste novo documento alguns exemplos para auxiliar os educadores na compreensão do trabalho indicado. Assim, consideramos aqui somente o documento final de 2006, a saber, a OCEN.

No documento para o Ensino Fundamental - anos finais, não encontramos explicitamente indicações de propostas para o trabalho com as funções, mas considerando que a proposta para o desenvolvimento da Álgebra enuncia a necessidade de estabelecer relação entre duas grandezas e modelar situações-problemas sem utilizar uma abordagem formal, podemos interpretar que, implicitamente, é indicada a iniciação ao pensamento funcional, mas é enfatizado que não se deve utilizar uma abordagem formal, o que corresponde a desenvolver a ideia de função por meio do ponto de vista relação entre grandezas.

Atualmente, na BNCC, a noção de função está presente no tema Álgebra, sendo considerado explicitamente que esta deve ser tratada de forma intuitiva, centrada na noção de proporcionalidade direta entre duas grandezas, sem utilizar a noção de regra de três, ou seja, o ponto de vista a ser

desenvolvido é o de relação entre grandezas, iniciando no Ensino Fundamental - anos iniciais e sendo aprofundado nos anos finais, momento em que se introduz a representação algébrica e se articulam as noções de equação e função, o que possibilita estabelecer a diferença entre incógnita e variável.

Já no documento do Ensino Médio por nós analisado, OCEM, Brasil (2006), é proposto o desenvolvimento da noção de função por meio de uma abordagem formal, iniciando pela revisão do trabalho desenvolvido no Ensino Fundamental - anos finais, no qual a ideia de função foi introduzida e desenvolvida enquanto relação entre grandezas e são considerados os dois modelos para a solução de tarefas intra e extramatemáticas com ênfase na representação gráfica para a identificação das propriedades. Na sequência, mesmo não utilizando esta nomenclatura, é proposta a introdução do ponto de vista relação entre conjuntos, o que supõe um tratamento formal, em particular, quando se consideram as propriedades das funções que podem ser justificadas algebricamente após visualização das mesmas graficamente. É indicado ainda o estudo das funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas e de suas propriedades.

Análise do documento estadual

Em 2008, o Estado de São Paulo, na tentativa de auxiliar os professores e estabelecer um currículo mínimo, introduz uma nova proposta (SÃO PAULO, 2012), que é acompanhada dos cadernos do professor e dos alunos, nos quais são desenvolvidos os conteúdos a serem abordados nos diferentes bimestres escolares.

Em relação à noção de função, observamos que para o último ano do Ensino Fundamental - anos finais, esta é proposta explicitamente para ser trabalhada no segundo bimestre, por meio do ponto de vista *relação entre grandezas*, dando-se ênfase aos ostensivos tabelas e gráficos.

Já quando consideramos o estudo da função proposto para o primeiro ano do Ensino Médio, observamos que a proposta segue a mesma orientação dada para o último ano do Ensino Fundamental - anos finais, ou seja, considerar o ponto de vista *relação entre grandezas* e articular a noção de função com a de proporcionalidade direta e inversa. A ênfase é dada ao estudo dos ostensivos gráficos e destaca-se a importância do trabalho com exemplos contextualizados.

Análise dos livros didáticos

Iniciamos ressaltando a justificativa de nossa escolha dos livros didáticos: estes são indicados em todas as edições do PNLD e, além disso, são livros do mesmo autor, o que pressupõe uma organização que obedece à determinada sequência. Este autor tem obras para o Ensino Fundamental - anos iniciais, finais e Ensino Médio.

Apresentamos a análise dos livros didáticos seguida da análise do caderno do professor e, no final, fazemos uma breve comparação com a avaliação SARESP para verificar as marcas da relação institucional sobre as relações pessoais esperadas dos estudantes.

Na análise da obra de Dante (2016) para o último ano do Ensino Fundamental - anos finais (alunos de 11 a 14 anos), observamos que, após introduzir o conceito de números reais, equações e sistemas de equações do segundo grau, é proposto um capítulo de exploração da ideia de função, que é introduzida intuitivamente por meio da noção de variável dependente e independente, ou seja, utilizando o ponto de vista *relação entre grandezas*. Por exemplo: (preço (y), quantidade (x)), (perímetro (y), lado (x)), (distância (y), tempo (x)), (área (y), lado (x)), etc.

Para o desenvolvimento da ideia de função, o autor utiliza os ostensivos: tabela, algébrico (fórmula) e gráfico. Para o estudo dos gráficos, é importante ressaltar a questão da não distinção das variáveis discretas e contínuas, o que pode dificultar o estudo das funções por meio do ponto de vista *relação entre conjuntos* e criar um obstáculo didático que corresponde a considerar que gráficos de funções são sempre contínuos, conforme pesquisa de Gouveia (2014).

São introduzidos ainda a noção de zero de uma função e um processo geométrico prático para identificar gráficos de funções, indicando que as variáveis devem pertencer ao conjunto dos números reais, ou seja, implicitamente o autor refere-se ao ponto de vista *relação entre conjuntos*, considerando as funções definidas dos reais nos reais.

Após esta introdução da ideia de função, são propostos problemas intra e extramatemáticos para serem modelados por meio da noção de função enquanto *relação entre grandezas*.

Observamos que nesta obra é proposta a utilização dos ostensivos algébrico, tabela e de gráfico para a resolução de tarefas intra e extramatemáticas com ênfase no ostensivo gráfico enquanto ferramenta de visualização das propriedades das funções.

Na obra de Dante (2016a) para o Ensino Médio, notamos que o autor, após introduzir a noção intuitiva de conjuntos, suas relações, operações e propriedades e os conjuntos numéricos, faz uma revisita à noção de função enquanto *relação entre grandezas* para, na sequência, introduzir o ponto de vista *relação entre conjuntos*. A partir desta definição, a noção de função é tratada formalmente e suas propriedades são enunciadas por meio do ostensivo algébrico, o que possibilita demonstrá-las.

São tratadas ainda as funções compostas e inversas e é proposta a articulação entre as noções de funções e sequências numéricas.

O estudo do ostensivo gráfico segue a mesma estrutura da desenvolvida no Ensino Fundamental - anos finais, ou seja, após demonstrar as propriedades, o ostensivo gráfico auxilia a criar as imagens mentais a elas associadas.

Os tipos de tarefas propostas são aplicações da definição da função e de suas propriedades e, quando possível, são indicadas tarefas de modelagem de situações contextualizadas.

Análise dos cadernos do professor

Iniciamos pelo caderno do último ano do Ensino Fundamental (alunos de 14 anos), no qual observamos que é prevista a introdução da noção intuitiva de conjuntos, suas operações, relações e propriedades, da noção de números reais, das equações do segundo grau e das grandezas proporcionais e não proporcionais para, na sequência, tratar a noção de função enquanto *relação entre grandezas*.

O estudo das grandezas direta e inversamente proporcionais inicia-se com a exploração de exemplo para os quais são dadas tabelas, nas quais se considera o ostensivo algébrico correspondente ($\frac{x}{y} = a$, $x \cdot y = b$ et $y = ax = b$, com a, b reais).

O estudo é centrado na determinação do ostensivo algébrico para indicar a relação de dependência entre duas grandezas a partir de tarefas enunciadas por meio do ostensivo tabela. É proposta ainda a passagem do ostensivo tabela para o ostensivo gráfico e destacamos que não se distinguem as grandezas discretas e contínuas, portanto os gráficos são sempre representados de forma contínua.

Os tipos de tarefas utilizados na introdução da noção de função, na articulação desta noção com a noção de proporcionalidade e na passagem do ostensivo tabela para o ostensivo algébrico são de situações em que é preciso relacionar grandezas encontradas no cotidiano, ou seja, as propriedades das funções e novas noções são sempre introduzidas por meio de exemplos com ênfase no ostensivo tabela.

Assim, o estudo das funções é centrado na sua articulação com a noção de proporcionalidade e, para tal, é utilizado o ponto de vista *relação entre grandezas*.

A análise do caderno indicado para o primeiro ano do Ensino Médio (estudantes de 15 anos) nos permitiu observar que se inicia com o estudo dos conjuntos numéricos e das sequências numéricas, seguidos da introdução das progressões aritméticas e geométricas e da Matemática financeira.

Após o desenvolvimento das noções acima, é proposto o estudo das funções enquanto “relação entre duas grandezas” de modo articulado com as noções de proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado.

Desta forma, é revisitada a proposta de introdução da noção de função desenvolvida no Ensino Fundamental - anos finais para, na sequência, por meio do ostensivo gráfico de uma função, estudar a monotonicidade e introduzir a noção de taxa de variação.

Observamos que o estudo das funções é centrado na visualização de suas propriedades por meio do ostensivo gráfico e, sempre que possível articulado com a noção de proporcionalidade. Assim, o estudo das funções é introduzido e desenvolvido por meio de tarefas cujo contexto está associado à *relação entre grandezas*, ou seja, o ponto de vista *relação entre conjuntos* não é introduzido.

Tipos de tarefas desenvolvidas nas duas obras

Apresentamos apenas os tipos de tarefas introduzidos no último ano do Ensino Fundamental - anos finais, pois em relação ao Ensino Médio, a diferença entre as duas propostas já se mostra evidente, uma vez que enquanto o livro didático introduz o ponto de vista *relação entre conjuntos*, o caderno trabalha apenas com o ponto de vista *relação entre grandezas*.

No quadro 1, apresentamos os tipos de tarefa encontrados nos livros didáticos e no caderno do professor analisados.

Quadro 1- Tipos de tarefas a serem desenvolvidas no último ano do Ensino Fundamental - anos finais.

Tipos de tarefa (livro didático - Ensino Fundamental anos finais - EF)	Tipos de tarefa (caderno - Ensino Fundamental anos finais - EF)
T1: Identificar as variáveis dependente e independente para uma função dada.	T1: Determinar, por meio do ostensivo algébrico, grandezas direta e inversamente proporcionais.
T2: Representar uma função por meio dos ostensivos: tabela, algébrico (fórmula) ou gráfico.	T2: Esboçar o gráfico de duas grandezas direta e inversamente proporcionais dadas por meio do ostensivo tabela.
T3: Reconhecer o gráfico de uma função.	T3: Estabelecer uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas dadas por meio do ostensivo tabela.
T4: Utilizar a noção de função para resolver problemas extramatemáticos.	

Fonte: Construção dos autores.

O quadro acima possibilita evidenciar que as propostas se completam, mas não é possível considerar apenas uma e esperar que todos os estudantes sejam capazes de relacionar e articular os conhecimentos desenvolvidos no livro didático e no caderno.

A macroavaliação SARESP

A análise dos relatórios pedagógicos do SARESP de 2008 a 2017 proporcionou identificar que as tarefas sobre funções estão associadas à proposta da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo,

ou seja, as tarefas que compõem a prova do 9º ano do Ensino Fundamental - anos finais e 3º ano do Ensino Médio dão ênfase à noção de função enquanto *relação entre grandezas* e tratam, mais particularmente, da questão da proporcionalidade direta, inversa e direta com o quadrado, o que não representa um problema para os estudantes que não utilizam o caderno, no caso, os estudantes das escolas privadas e das escolas das escolas municipais, uma vez que o livro didático também considera a introdução ao estudo das funções por meio da *relação entre grandezas* no 9º ano e revisita esta noção no Ensino Médio. Acreditamos que a maior dificuldade está associada à questão da proporcionalidade, que é considerada apenas por meio da função linear nos livros didáticos e por meio de casos particulares nos cadernos.

Em relação ao desempenho dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental - anos finais, observamos que as respostas corretas variam de 5,1% (tarefa destacada na sequência) a 36,7% para tarefas abordando, em geral, proporcionalidade direta. Quando a proporcionalidade é inversa, as respostas corretas diminuem; por exemplo, em 2015, a porcentagem de acerto para uma tarefa de proporcionalidade inversa foi de 19,2%. Para os estudantes do Ensino Médio, os resultados ficam entre 19,2% e 49,2%, sendo que as respostas corretas com menor porcentagem correspondem às tarefas em que a proporcionalidade é inversa, ou seja, a proporcionalidade inversa agrega mais dificuldades do que a proporcionalidade direta.

Isso tende a mostrar que os melhores resultados relacionam-se às tarefas sobre proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas, mais particularmente para os estudantes do Ensino Médio e, mais especificamente, para tarefas cuja solução está associada à passagem entre os ostensivos: linguagem natural, algébrico, tabela e gráfico, com ênfase no ostensivo algébrico. Desse modo, a relação pessoal esperada está em conformidade com a abordagem desenvolvida no caderno, podendo apresentar dificuldades para os que utilizam apenas o livro didático.

É interessante ressaltar que a tarefa que apresentou mais dificuldade é justamente a que se refere a uma abordagem exclusiva do caderno, cuja forma de tratamento específica pode ter sido a causa do baixo desempenho dos estudantes.

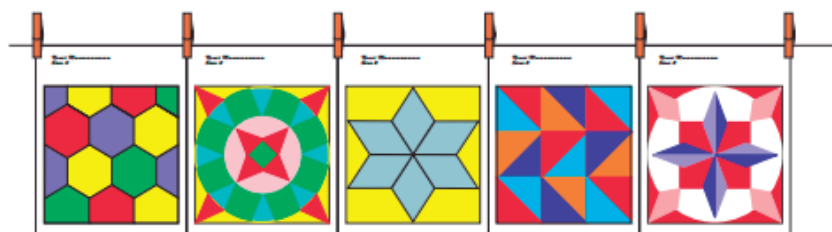
Na sequência, destacamos a tarefa do 9º ano do Ensino Fundamental - anos finais sobre proporcionalidade direta e função que trouxe maior dificuldade entre todas as apresentadas nos relatórios, ou seja, um índice de sucesso de apenas 5,1%. Na realidade, para resolver essa tarefa, é preciso compreender que não existe proporcionalidade direta entre x e y . Mas os autores dos cadernos, a fim de manter a abordagem considerada, utilizam de forma abusiva a proporcionalidade entre $y - b$ e x , como podemos observar no extrato que segue:

Sempre que expressamos por meio de variáveis uma situação de interdependência envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais, chegamos a uma função de 1º grau. De modo geral, uma função de 1º grau é expressa por uma fórmula do tipo $f(x) = ax + b$, em que a e b são constantes, sendo $a \neq 0$. Quando $a = 0$, a função se reduz a $f(x) = b$, ou seja, a uma função constante. (SÃO PAULO, 2009, p. 65).

Observamos ainda que, ao definir função polinomial do primeiro grau ou função afim, os autores cometem um abuso de linguagem, usando apenas função do 1º grau, o que pode ser considerado também um problema conceitual, uma vez que função não tem grau, como ressaltam Lages Lima et al. (2006).

Figura 1 - Enunciado de uma tarefa do SARESP de 2010 sobre função.

Tarefa: Na aula de Matemática, a turma de Juliana desenhou mosaicos, utilizando figuras geométricas. Ao final da aula, todos os desenhos decoraram a sala. Utilizando um fio e pregadores de roupa, os alunos foram prendendo seus desenhos, um ao lado do outro, como mostra a figura.



- Escreva a função y que expressa a quantidade de pregadores utilizados para prender x desenhos, do mesmo jeito mostrado na figura.
- Qual é a quantidade de pregadores necessária para prender, como mostra a figura, 24 desenhos?

Fonte: São Paulo, 2010, p. 164.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossas considerações finais, apresentamos os principais resultados da análise da transição entre o Ensino Fundamental - anos finais e o Ensino Médio no que concerne ao ensino do conceito de função. Essa análise foi feita em termos das regularidades e diferenças preconizadas pelos documentos oficiais e livros didáticos, considerando a proposta brasileira e a proposta de São Paulo.

A análise do documento nacional, que contém as proposições para o Ensino Fundamental - anos finais, realizada por meio do PCN (BRASIL, 1998), menciona implicitamente a importância de desenvolver a noção de função por meio do ponto de vista *relação entre grandezas*, não utilizando essa nomenclatura, o que é respeitado pelo currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012).

O documento nacional relativo ao Ensino Médio (BRASIL, 2006) recomenda revisitar a abordagem desenvolvida no Ensino Fundamental - anos finais para, na sequência, ampliar esta abordagem por meio da introdução do ponto de vista *relação entre conjuntos*, não utilizando essa nomenclatura. Ressaltamos aqui que essa ampliação autoriza um tratamento formal das propriedades das funções e as justificativas e demonstrações das mesmas, o que amplia a introdução feita no Ensino Fundamental, uma vez que essas mesmas propriedades foram apresentadas e justificadas por meio do ostensivo gráfico. Apesar de as proposições acima constarem do documento nacional sob a forma de proposta para o desenvolvimento da noção de função no Ensino Médio, o documento da Secretaria de Educação de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) não indica a necessidade de uma abordagem formal para o Ensino Médio, cuja abordagem proposta é centrada no ponto de vista *relação entre grandezas*.

Observamos que, mesmo se tratando apenas de proposta e permitindo uma liberdade de escolha, os dois documentos deixam pouco espaço para os professores e estes terminam confinados nos níveis *temas* e *tópicos*, se nos referimos à escala dos níveis de codeterminação didática. Desse modo, as escolhas pertinentes aos níveis escola, pedagogia, disciplina, domínio e setores acabam

ficando apenas sob a responsabilidade política e da noosfera disciplinar, mais particularmente aos especialistas da disciplina. Os professores de São Paulo ficam assim praticamente obrigados a seguir as propostas indicadas, uma vez que seus estudantes passam por cinco macroavaliações anuais da própria Secretaria de Estado da Educação. Além disso, em alguns anos, existem ainda as avaliações nacionais e internacionais.

Considerando que o livro didático é avaliado e distribuído pelo Ministério da Educação e que, em São Paulo, existe ainda o “*caderno*”, material didático construído e distribuído pela Secretaria de Estado da Educação para aprofundar as análises, estudamos as praxeologias a ensinar em um livro didático entre os mais utilizados e no caderno do professor de forma a compreender as margens de manobra possíveis.

Desse modo, mostramos que, inicialmente, o ponto de vista *relação entre grandezas* é introduzido e desenvolvido no último ano do Ensino Fundamental - anos finais (alunos de 14 anos) nos dois materiais. As técnicas a ensinar são justificadas por meio da proporcionalidade no caderno do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, ao passo que nos livros didáticos, elas são justificadas por meio do ostensivo gráfico de funções somente no Ensino Fundamental, pois no Ensino Médio, a introdução do ponto de vista *relação entre conjuntos* possibilitou a demonstração de tais propriedades apoiando-se no ostensivo algébrico.

Sendo assim, observamos que as tecnologias desenvolvidas nos livros didáticos do Ensino Médio estão associadas à noção intuitiva de conjuntos, enquanto as do Ensino Fundamental - anos finais, tanto para o caderno, como para o livro didático e do caderno para o Ensino Médio são desenvolvidas por meio da teoria da proporcionalidade.

Essa distinção entre os dois materiais que são indicados para serem utilizados concomitantemente coloca em evidência as dificuldades encontradas pelos professores, que precisam articular duas abordagens que estão relacionadas matematicamente, mas que dependem de dois pontos de vista distintos, exigindo diferentes conhecimentos prévios, que muitas vezes não correspondem à realidade de seus estudantes, o que ficou evidente por meio da questão da macroavaliação SARESP, que apresentou dificuldades em função da forma de tratamento diferir da habitual.

Além disso, quando da introdução de novas propostas, é preciso considerar a importância de uma formação específica para os professores, uma vez que essas mudanças fazem parte da pesquisa em Educação Matemática, mas sabemos que as mesmas ainda são pouco difundidas entre os professores, o que é um tema interessante para novas pesquisas.

REFERÊNCIAS

BOSCH, M., e CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. 1997.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/1pn7CKR>>.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. 1998.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2JrweUk>>. Acesso em: 06 de maio 2018.

BRASIL.**Parâmetros Curriculares Nacionais**Ensino *Médio*. 2000. [internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/1KAXI4S>>.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias.PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEMTEC. 2002. [internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2uvf40a>>.

BRASIL. **Organizações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM.** 2006. [internet] Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/1HmJPBm>>.

BRASIL.**Base Nacional Comum Curricular.** 2018. [internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2GTxAKt>>.

CHEVALLARD,Y.; ARTAUD, M. **Fondements et méthodes de la recherche en didactique.** 2016.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2QDRE0I>>.

CHEVALLARD, Y. **Pour une approche anthropologique du rapport au savoir.** 2015.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2pfoM25>>.

CHEVALLARD, Y. **Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement.** 2014.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2xjwTz3>>

CHEVALLARD,Y. **Didactique Fondamentale.** 2011.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2Nm7jni>>.

CHEVALLARD,Y. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.** 2007.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em : <<https://bit.ly/2pgXhoM>>.

CHEVALLARD,Y. **Organiser l'étude 3: Ecologie & Regulation.** 2002.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2pfzxSh>>.

CHEVALLARD,Y. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique.** 1994.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2PKcDgT>>.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris : Matemática.** São Paulo : Ática, 2016.

DANTE, L. R.**Matemática contexto e aplicações.** São Paulo : Ática, 2016a.

DIAS, M.A. **Les problèmes d'articulation entre les points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre lineaire.** Thèse de doctorat, Université de Paris 7. França, 1998.

DOUADY, R. **Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques.** Thèse de Doctorat, Université de Paris 7. França, 1984.

GOUVEIA, J. **A noção de função: Uma abordagem centrada em situações de aprendizagem.** Tese de Doutorado, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil, 2014.

LAGES LIMA, E. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 2013.

ROGALSKI, M. **Quelques points sur l'histoire et l'épistémologie des fonctions, pouvant éclairer certaines questions didactiques sur leur enseignement**. 2013.[internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2pglN8u>>.

ROGALSKI, M. Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In: **Actes de la journée en hommage à Régine Douady**. Paris, França: Didirem, 2001, p.13-30.

SÃO PAULO (2012). **Currículo: Matemática e suas tecnologias**. 2012. [internet] [Acesso em 2018, mai, 07] Disponível em: <<https://bit.ly/2Ni6RGt>>.

SÃO PAULO. **Relatório SARESP de Matemática**. 2010. [internet] [Acesso em 2018, mai, 06] Disponível em: <<https://bit.ly/2xskEc>>.

SÃO PAULO. **Caderno do professor**. São Paulo : Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, 2009.

RECEBIDO EM: 21 mai 2018

CONCLUÍDO EM: 26 ago. 2018